第12講　指数の拡張
PART1　0 や負の整数の指数

要点① a^0，a^{-n} の定義と指数法則

n が正の整数のとき，a^n は「a を n 個掛けたもの」であり，n を「指数」という。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n\text{個}}$$

また，a^1，a^2，……を a の「累乗」という。

$a \neq 0$ で，m，n が正の整数のとき，次の法則が成り立つ。

指数法則

1　$a^m a^n = a^{m+n}$　　$a^2 \times a^3 = a^5$

2　$(a^m)^n = a^{mn}$　　$(a^2)^3 = a^6$

3　$(ab)^n = a^n b^n$　　$(ab)^2 = a^2 b^2$

また，$m > n$ のとき $a^m \div a^n = a^{m-n}$ である。例えば，$a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$ である。

ここでは，指数が 0 や負の整数の場合でも上の指数法則が成り立つように，累乗 a^n の意味を定める。

$n=0$ のとき，指数法則 **1**　$a^m a^n = a^{m+n}$　が成り立つとすると

$a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$　　よって　$a^0 =$

$m=-n$ のとき，指数法則 **1**　$a^m a^n = a^{m+n}$　が成り立つとすると

$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 =$　　よって　$a^{-n} a^n = 1$　より　$a^{-n} =$

よって，指数が 0 や負の整数のときの累乗を，次のように定める。

a^0，a^{-n} の定義

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき

$$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

この定義により，m，n が正の整数のときだけでなく，0 や負の整数のときも，指数法則 **1** ～ **3** が成り立つ。

例 $a^3 a^{-2} = a^3 \times \quad = a^1 = a^{3+(-2)}$　　よって　$a^3 a^{-2} = a^{3+(-2)}$

$(a^3)^{-2} = \quad = \dfrac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{3\times(-2)}$　　よって　$(a^3)^{-2} = a^{3\times(-2)}$

$(ab)^{-3} = \quad = \dfrac{1}{a^3 b^3} = \dfrac{1}{a^3} \times \dfrac{1}{b^3} = a^{-3} b^{-3}$　　よって　$(ab)^{-3} = a^{-3} b^{-3}$

また，m，n が整数のとき，以下が成り立つ。

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (ab^{-1})^n = a^n (b^{-1})^n = a^n b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$$

これまでのことから，以下の指数法則が成り立つ。

指数法則（指数が整数）

$a \fallingdotseq 0$，$b \fallingdotseq 0$ で，m，n が整数のとき

1 $a^m a^n = a^{m+n}$　　**1’** $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2 $(a^m)^n = a^{mn}$

3 $(ab)^n = a^n b^n$　　**3’** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

1 次の計算をせよ。

(1) $a^5 \times a^{-3}$

(2) $a^{-6} \div a^{-2} \times a^4$

(3) $(a^{-3})^{-4}$

(4) $(a^4 b^{-3})^{-2}$

Point Pickup

指数の拡張と指数法則（指数が整数）

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき　$a^0 = 1$，$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき

1　$a^m a^n = a^{m+n}$　　**1’**　$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2　$(a^m)^n = a^{mn}$

3　$(ab)^n = a^n b^n$　　**3’**　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

第12講 PART1 確認問題

次の計算をせよ。

1 $a^{6} \times a^{-3} = a^{\boxed{\text{ア}}}$

2 $a^{-3} \div a^{-5} \times a^{4} = a^{\boxed{\text{イ}}}$

3 $(a^{-2})^{-5} = a^{\boxed{\text{ウエ}}}$

4 $(a^{3} b^{-4})^{-2} = a^{\boxed{\text{オカ}}} b^{\boxed{\text{キ}}}$

$$= \frac{b^{\boxed{\text{ク}}}}{a^{\boxed{\text{ケ}}}}$$

第12講　指数の拡張

PART1　0 や負の整数の指数

1　次の計算をせよ。

(1)　$a^5 \times a^{-3}$　　(2)　$a^{-6} \div a^{-2} \times a^4$

(3)　$(a^{-3})^{-4}$　　(4)　$(a^4 b^{-3})^{-2}$

[解答]

(1)　$a^5 \times a^{-3} = a^{5-3} = a^2$

(2)　$a^{-6} \div a^{-2} \times a^4 = a^{-6-(-2)+4} = a^{-6+2+4} = a^0 = 1$

(3)　$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\times(-4)} = a^{12}$

(4)　$(a^4 b^{-3})^{-2} = a^{4\times(-2)} b^{(-3)\times(-2)} = a^{-8} b^6 = \dfrac{b^6}{a^8}$

第 12 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3

[解説]

$a^6 \times a^{-3} = a^{6+(-3)}$ [A]

$= \boldsymbol{a^3}$

[A]　$a^m a^n = a^{m+n}$

2 **[正解]** イ：6

[解説]

$a^{-3} \div a^{-5} \times a^4 = a^{-3-(-5)+4}$ [B]

$= a^{-3+5+4}$

$= \boldsymbol{a^6}$

[B]　$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3 **[正解]** ウエ：10

[解説]

$(a^{-2})^{-5} = a^{(-2)\times(-5)}$ [C]

$= \boldsymbol{a^{10}}$

[C]　$(a^m)^n = a^{mn}$

4 **[正解]** オカ：−6，キ：8，ク：8，ケ：6

[解説]

$(a^3 b^{-4})^{-2} = (a^3)^{-2}(b^{-4})^{-2}$ [D]

$= a^{3\times(-2)} b^{(-4)\times(-2)}$

$= \boldsymbol{a^{-6} b^8}$

$= \dfrac{\boldsymbol{b^8}}{\boldsymbol{a^6}}$

[D]　$(ab)^n = a^n b^n$

$(a^m)^n = a^{mn}$